

Anhang B Vergleich der Freiheitsgrade einer kaskadierten mit einer einstufigen Filterbankstruktur

Die Freiheitsgrade einer kaskadierten Struktur werden mit denen einer einstufigen Struktur am Beispiel einer eindimensionalen gleichförmigen Vierbandaufteilung verglichen. Die in der kaskadierten Struktur mit gleichförmiger Vierbandaufteilung eingesetzten linearphasigen Teilbandfilter besitzen dabei in der 1. Stufe L_1 und in der 2. Stufe L_2 Koeffizienten. Die Unterabtastung in der 1. Stufe betrage $N_1 = 2$, die in der 2. Stufe $N_2 = 2$. Die Anzahl F der Freiheitsgrade dieser Struktur beträgt dann nach [11]

$$F_{kask} = \left(\frac{L_1}{N_1} + 1 \right) \frac{N_1^2}{4} + \left(\frac{L_2}{N_2} + 1 \right) \frac{N_2^2}{4}. \quad (\text{B.1})$$

Die einstufige Struktur mit gleichförmiger Vierbandaufteilung besitze Koeffizienten der Anzahl

$$L = L_1 + N_1(L_2 - 1), \quad (\text{B.2})$$

so daß die Anzahl der Koeffizienten identisch ist mit der resultierenden Anzahl der Koeffizienten bei der kaskadierten Struktur. Ferner sei der Unterabtastfaktor

$$N = N_1 N_2 = 4. \quad (\text{B.3})$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade dieser Struktur beträgt dann nach [11]

$$F_{einstufig} = \left(\frac{L}{N} + 1 \right) \frac{N^2}{4} \quad (\text{B.4})$$

und führt mit Gll. (B.2) und (B.3) auf

$$F_{einstufig} = \frac{N_1 N_2}{4} (L_1 + L_2 N_1 - N_1 + N_1 N_2) \quad (\text{B.5})$$

Es soll gezeigt werden, daß

$$\frac{L_1 N_1 N_2 + L_2 N_1^2 N_2 - N_1^2 N_2 + N_1^2 N_2^2}{4} > \frac{L_1 N_1 + N_1^2 + L_2 N_2 + N_2^2}{4}. \quad (\text{B.6})$$

Mit $N_1, N_2, L_1, L_2 > 1 \in \mathbb{N}$ folgt

$$L_1 N_1 N_2 > L_1 N_1 \quad (\text{B.7})$$

und

$$L_2 N_1^2 N_2 > L_2 N_2, \quad (\text{B.8})$$

so daß zu zeigen ist, daß

$$N_1^2 N_2^2 - N_1^2 N_2 \geq N_1^2 + N_2^2. \quad (\text{B.9})$$

Gl. (B.9) läßt sich umformen zu

$$1 \geq \frac{N_1^2 + N_2^2 + N_1^2 N_2}{N_1^2 N_2^2}. \quad (\text{B.10})$$

Wegen $N_1, N_2 > 1 \in \mathbb{N}$ folgt

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{N_2^2} + \frac{1}{N_1^2} + \frac{1}{N_2}, \quad (\text{B.11})$$

womit gezeigt ist, daß die Anzahl der Freiheitsgrade bei der einstufigen Struktur größer ist als bei der kaskadierten bei gleicher resultierender Filterlänge.